

- En los triángulos isósceles, la altura sobre la base coincide con la bisectriz, la mediana y la mediatriz. Si es equilátero, la altura sobre cada lado coincide con las restantes rectas notables.
- En todo triángulo se cumple (fig. 26):

• Ley de los senos

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

donde R es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo.

• Ley de los cosenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

En particular el triángulo es rectángulo si y solo si

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (\text{Teorema de Pitágoras}) \quad (\text{fig. 27})$$

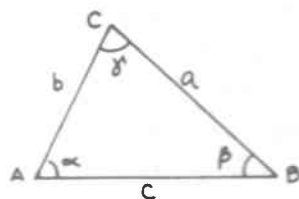


Fig. 26

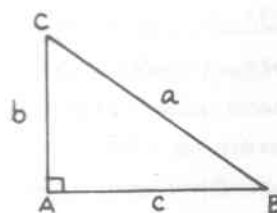


Fig. 27

Ejemplo 2

En la figura 28 se tienen:

AC bisectriz del $\angle DAB$

$$\angle DEB = 110^\circ$$

$$\angle ADE = 70^\circ$$

$$\angle CBA = 60^\circ$$

halla $\angle ACB$

Resolución

En el $\triangle ADE$ se tiene:

$$\angle DEB = \angle EDA + \angle DAE \quad \text{Por ángulo exterior de un triángulo.}$$

$$\angle DAE = \angle DEB - \angle EDA$$

$$\angle DAE = 110^\circ - 70^\circ = 40^\circ$$

$$\angle CAB = \frac{\angle DAE}{2} = 20^\circ \quad \text{por ser AC bisectriz del } \angle DAB$$

luego en el $\triangle ABC$ tenemos que:

$$\angle ACB = 180^\circ - (\angle CBA + \angle CAB) \quad \text{por suma de ángulos interiores de un triángulo}$$

$$\angle ACB = 180^\circ - (60^\circ + 20^\circ) = 100^\circ \quad \blacksquare$$

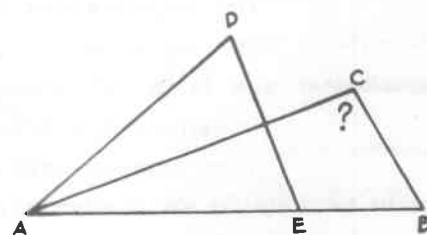


Fig. 28

Ejemplo 3

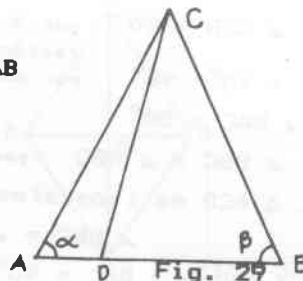
En el ΔABC isósceles de base AB (fig. 29) se tiene:

$$\overline{AC} = 10 \text{ cm}$$

$$\overline{BD} = 4,0 \text{ cm}$$

$$\angle ACB = 28,8^\circ$$

Halla $\overline{CD}$ y $\angle CDB$



Resolución

En el ΔABC isósceles de base $\overline{AB}$ se tiene:

$$\overline{BC} = \overline{AC} = 10 \text{ cm} \quad \text{y} \quad \alpha = \beta$$

$$2\beta + \angle ACB = 180^\circ$$

por suma de ángulos interiores

$$\beta = \frac{180^\circ - \angle ACB}{2} = \frac{180^\circ - 28,8^\circ}{2} = 75,6^\circ$$

En el ΔBCD se tiene:

$$\overline{CD}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{BC} \cdot \overline{BD} \cos \beta$$

ley de los cosenos

$$\overline{CD}^2 = 4^2 + 10^2 - 2 \cdot 4 \cdot 10 \cos 75,6^\circ$$

$$\overline{CD}^2 = 16 + 100 - 80 \cdot 0,249$$

$$\overline{CD}^2 = 116 - 19,9$$

$$\overline{CD}^2 = 96,1$$

$$\overline{CD} = 9,8 \text{ cm}$$

Aplicando ley de los senos se tiene:

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \angle CDB} = \frac{\overline{CD}}{\sin \beta} \quad \text{luego}$$

$$\sin \angle CDB = \frac{\overline{BC} \sin \beta}{\overline{CD}} = \frac{10 \sin 75,6^\circ}{9,8} = \frac{10 \cdot 0,969}{9,8} = 0,9888$$

$$\text{entonces } \angle CDB = 81,4^\circ \approx 81^\circ$$

Ejemplo 4

En el ΔABC rectángulo en B

(fig. 30) se tiene:

ΔBCD isósceles de base $\overline{BC}$

$$\angle ACB = 40^\circ.$$

Prueba que: $\overline{BD}$ es mediana sobre el lado $\overline{AC}$.

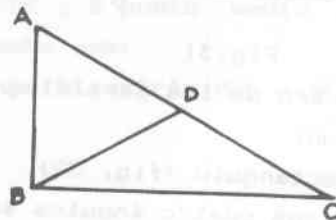


Fig. 30

Resolución

Hay que probar que $\overline{AD} = \overline{DC}$

En el ΔABC rectángulo en B tenemos:

$$\begin{aligned}\angle BAC + \angle ACB &= 90^\circ && \text{por ángulos agudos de un triángulo rectángulo} \\ \angle BAC + 40^\circ &= 90^\circ && \text{por datos} \\ \angle BAC &= 50^\circ\end{aligned}$$

$$\angle ABD + \angle DBC = \angle ABC \quad \text{por suma de ángulos}$$

Como el ΔBCD es isósceles de base $\overline{BC}$ entonces:

$$\angle DBC = \angle ACB = 40^\circ$$

$$\text{ahora } \angle ABD + \angle DBC = 90^\circ \quad \text{por ser el } \Delta ABC \text{ rectángulo en } B$$

$$\angle ABD + 40^\circ = 90^\circ$$

$$\angle ABD = 50^\circ$$

luego en el ΔABD se tiene que:

$$\overline{AD} = \overline{DB} \quad \text{por ser lados que se oponen a ángulos iguales en un triángulo.}$$

$$\text{como } \overline{DB} = \overline{DC} \quad \text{por ser el } \Delta BCD \text{ isósceles de base } \overline{BC}$$

por tanto $\overline{AD} = \overline{DC}$ como se quería. ■

CUADRILÁTEROS

Al igual que en los triángulos los cuadriláteros convexos también tienen su clasificación, pero, en este caso atendiendo al paralelismo de sus lados.

Estos cuadriláteros se clasifican en: *paralelogramos*, *trapezios* y *trapezoides*

● Los paralelogramos (fig. 31) cumplen:

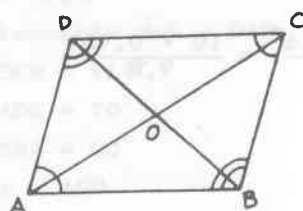


Fig. 31

- sus lados opuestos son paralelos e iguales,
- sus ángulos opuestos son iguales y los consecutivos suman 180° ,
- las diagonales se cortan en su punto medio.

Dentro de los paralelogramos existen casos especiales que son:

● Rectángulo (fig. 32)

- sus cuatro ángulos son rectos,
- sus diagonales son iguales.

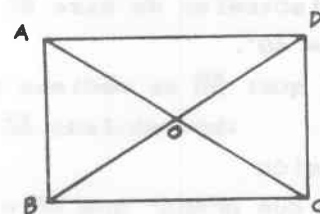


Fig. 32

● Rombo (fig. 33)

- sus cuatro lados son iguales,
- sus diagonales son perpendiculares y bisecan los ángulos de donde parten.

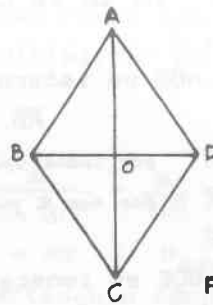


Fig. 33

El *cuadrado* es un paralelogramo que es a la vez rectángulo y rombo.

● Los trapecios (fig. 34)

son los cuadriláteros convexos que tienen al menos un par de lados paralelos que se denominan bases.

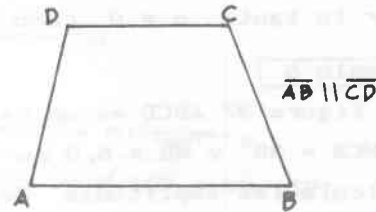


Fig. 34

● Los trapezoides (fig. 35)

son los cuadriláteros convexos que no tienen ningún par de lados paralelos

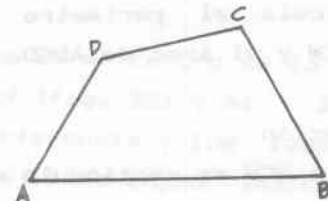


Fig. 35

Ejemplo 5

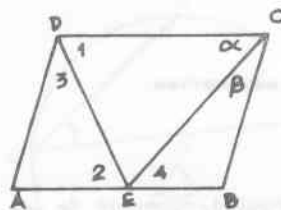


Fig. 36

Sea ABCD (fig. 36) un paralelogramo. $\overline{DE}$ es bisectriz del $\angle ADC$ y E punto medio de $\overline{AB}$. Prueba que: $\overline{CE}$ es bisectriz del $\angle DCB$

Resolución

Para probar que $\overline{CE}$ es bisectriz del $\angle DCB$ basta con probar que $\alpha = \beta$ (fig. 36)

$\angle 1 = \angle 2$ por alternos entre $AB \parallel CD$ y DE secante.

$\angle 1 = \angle 3$ por ser $\overline{DE}$ bisectriz del $\angle ADC$.
 luego $\angle 2 = \angle 3$
 por lo que $\triangle ADE$ es isósceles de base $\overline{DE}$ entonces

$$\overline{AD} = \overline{AE}$$

pero $\overline{AD} = \overline{BC}$ por lados opuestos de un paralelogramo.

$$\overline{AE} = \overline{BE} \quad \text{por ser E punto medio de } \overline{AB}.$$

$$\text{luego } \overline{BC} = \overline{BE}$$

por lo que $\triangle BCE$ es isósceles de base $\overline{EC}$ de aquí que:

$$\beta = \angle 4$$

pero $\alpha = \angle 4$ por alternos entre $AB \parallel CD$ y CE secante.

por lo tanto $\alpha = \beta$ como se quería. ■

Ejemplo 6

En la figura 37 ABCD es un rectángulo y ANCM es un rombo.
 Si $\angle NCB = 30^\circ$ y $\overline{NB} = 6,0$ cm

a) Calcula las amplitudes de los ángulos interiores del rombo.

b) Calcula el perímetro de ANCM y el área de ABCD.

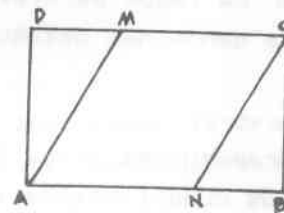


Fig. 37

Resolución

El $\triangle BCN$ es rectángulo en B por ser el $\angle BCN$ un ángulo del rectángulo ABCD luego:

a) $\angle BNC + \angle NCB = 90^\circ$ por suma de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo.

$$\angle BNC + 30^\circ = 90^\circ$$

$$\angle BNC = 60^\circ$$

$$\angle ANC + \angle BNC = 180^\circ \quad \text{por ángulos adyacentes.}$$

$$\angle ANC + 60^\circ = 180^\circ$$

$$\angle ANC = 120^\circ$$

$$\text{luego } \angle AMC = \angle ANC = 120^\circ \quad \text{por ángulos opuestos de un rombo.}$$

$$\angle MAN + \angle ANC = 180^\circ \quad \text{por ser ángulos consecutivos de un rombo.}$$

$$\angle MAN + 120^\circ = 180^\circ$$

$$\angle MAN = 60^\circ$$

$$\text{luego } \angle MCN = \angle MAN = 60^\circ \quad \text{por ángulos opuestos de un rombo}$$

b) Para hallar el perímetro del rombo ANCM basta con hallar uno de sus lados y multiplicar por cuatro (punto 24 del Memento).

En el ΔBCN tenemos:

$$\overline{CN} = \frac{\overline{NB}}{\sin \angle NCB} = \frac{6}{\sin 30^\circ} = \frac{6}{0,5} = 12$$

$$\text{luego } p_{ANCM} = 4 \cdot \overline{CN} = 4 \cdot 12 = 48 ; p_{ANCM} = 48 \text{ cm}$$

Para hallar el área del rectángulo ABCD debemos hallar la longitud de dos lados consecutivos (punto 25 del Memento),

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{AN} + \overline{NB} \quad \text{por suma de segmentos.} \\ &= 12 + 6 = 18 \text{ cm} \end{aligned}$$

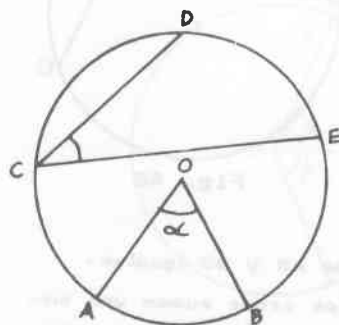
$$\begin{aligned} \overline{CB} &= \sqrt{\overline{CN}^2 - \overline{NB}^2} \quad \text{por teorema de Pitágoras.} \\ &= \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{144 - 36} = \sqrt{108} = 10,39 \end{aligned}$$

$$\text{luego } A_{ABCD} = \overline{AB} \cdot \overline{CB} = 18 \cdot 10,39 = 187,02 ; A_{ABCD} = 1,9 \cdot 10^2 \text{ cm}^2$$

ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

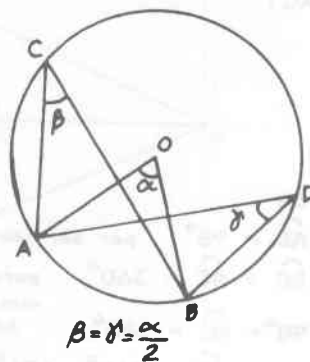
El ángulo que tiene su vértice en el centro de la circunferencia se llama *ángulo central* (fig. 38) y el ángulo que tiene su vértice en la circunferencia y los lados la intersecan en otros dos puntos se llama *ángulo inscrito* en la circunferencia.

- La amplitud de todo ángulo inscrito es igual a la mitad del ángulo central (arco) que le corresponde (fig. 39)



α : ÁNGULO CENTRAL
 β : ÁNGULO INSCRITO

Fig. 38



$$\beta = \gamma = \frac{\alpha}{2}$$

Fig. 39

- Todo ángulo central o inscrito en una circunferencia determina un arco y, por tanto, una cuerda, luego si dos ángulos centrales o inscritos son iguales las cuerdas correspondientes también lo son y viceversa (fig. 39 y 40)
- Si un ángulo está inscrito en un diámetro (la mayor de todas las cuerdas) este ángulo mide 90° (fig. 41).

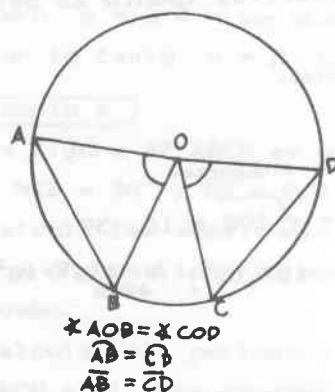


Fig. 40

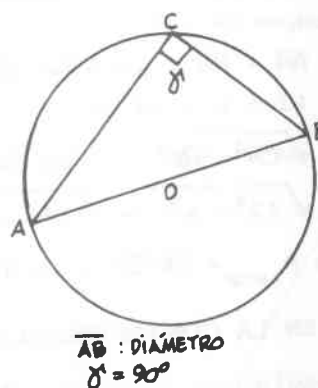


Fig. 41

Ejemplo 7

En la figura 42 las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son iguales, $\widehat{AB} = 98^\circ$.
Calcula $\widehat{AC}$.

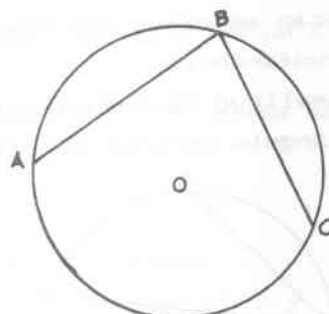


Fig. 42

Resolución

$$\widehat{BC} = \widehat{AB} = 98^\circ \quad \text{por ser las cuerdas } \overline{AB} \text{ y } \overline{BC} \text{ iguales.}$$

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{AC} = 360^\circ \quad \text{porque estos arcos suman una circunferencia completa.}$$

$$98^\circ + 98^\circ + \widehat{AC} = 360^\circ$$

$$\widehat{AC} = 360^\circ - 196^\circ$$

$$\widehat{AC} = 164^\circ \quad \blacksquare$$

Ejemplo 8

En la figura 43 el $\angle ACB$ está inscrito en la circunferencia de centro O

$$\angle ACB = 35^\circ$$

$$OB \perp AC$$

calcula $\angle OAD$

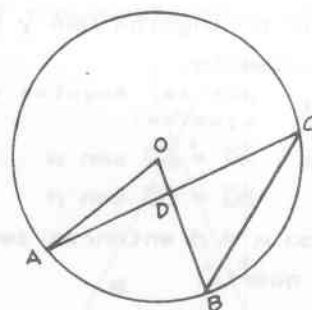


Fig. 43

Resolución

$$\angle ACB = \frac{\angle AOB}{2}$$

por relación entre ángulo central inscrito.

$$\angle AOB = 2 \cdot \angle ACB$$

$$\angle AOB = 2 \cdot 35^\circ$$

$$\angle AOB = 70^\circ$$

Como $OB \perp AC$ el $\triangle OAD$ es rectángulo en D , luego

$$\angle AOB + \angle OAD = 90^\circ$$

por suma de ángulos agudos de un triángulo rectángulo.

$$70^\circ + \angle OAD = 90^\circ$$

$$\angle OAD = 20^\circ$$

■

Ejemplo 9

En la figura 44 las rectas AQ y BQ son tangentes a la circunferencia de centro O en los puntos A y B . Si $\widehat{AC} = \widehat{CB}$, prueba que: $\overline{AQ} = \overline{BQ}$

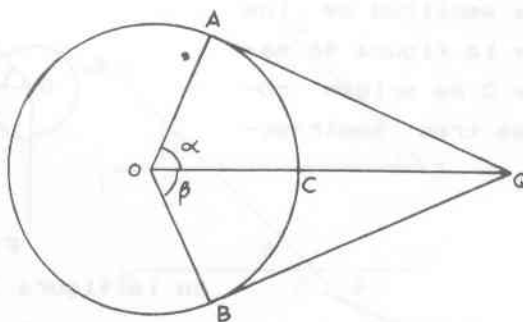


Fig. 44

Resolución

$$\left. \begin{array}{l} \overline{OA} \perp \overline{AQ} \\ \overline{OB} \perp \overline{BQ} \end{array} \right\}$$

porque toda tangente es perpendicular al radio en el punto de tangencia.

luego los triángulos OQA y OQB son rectángulos en A y B respectivamente.

$$\alpha = \beta \quad \text{por ser ángulos centrales que tienen arcos iguales.}$$

entonces $\overline{AQ} = \overline{OQ} \operatorname{sen} \alpha$ (punto 28 del Memento)

$$\overline{BQ} = \overline{OQ} \operatorname{sen} \beta$$

pero como $\alpha = \beta$ entonces $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \beta$, por tanto, $\overline{AQ} = \overline{BQ}$ como se quería. ■

Otra vía para resolver el ejemplo anterior es utilizando la igualdad de triángulos que trataremos en el siguiente epígrafe.

Ejercicios (epígrafe 7)

1. Si $\angle AOC = \angle BOD$ (fig. 45). Prueba que: $\alpha = \beta$

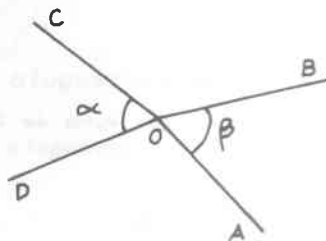


Fig. 45

2. En un par de ángulos adyacentes, uno tiene cinco veces la amplitud del otro. Indica cuánto mide cada uno.
3. Calcula la amplitud de los ángulos de la figura 46 sabiendo que O es origen común de las tres semirrectas dadas.

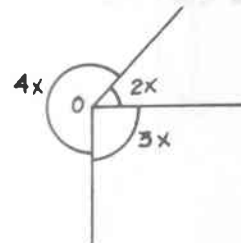


Fig. 46

4.

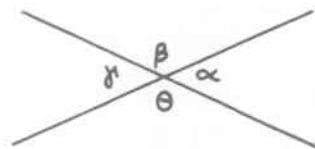


Fig. 47

En la figura 47, si:

$$\beta = \frac{5\alpha + 80^\circ}{2} \quad \text{calcula}$$

$$\alpha, \beta, \gamma \text{ y } \theta$$

5. Demuestra que si dos ángulos son adyacentes, sus bisectrices son perpendiculares.

6. En la figura 48, determina todos los pares de ángulos adyacentes, opuestos por el vértice, correspondientes, alternos y conjugados que hay y calcula sus amplitudes si: $\angle 3 = 60^\circ$

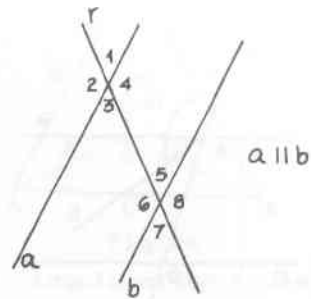


Fig. 48

7. Dada la amplitud del ángulo doblemente marcado en la figura 49, donde $AB \parallel CD$ y MN secante. Calcula las amplitudes de los restantes ángulos señalados.

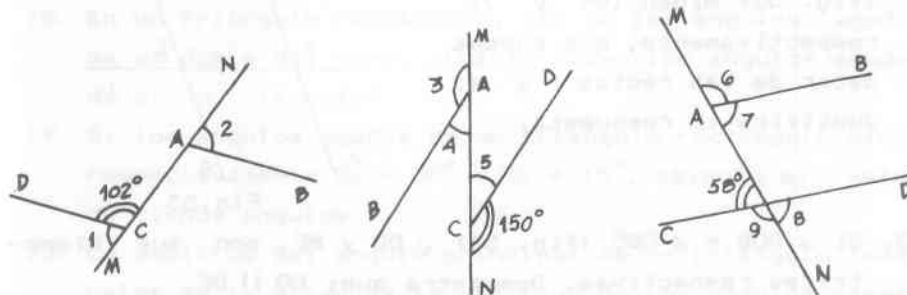


Fig. 49

8. En la figura 50, $AB \parallel DE$, $CB \parallel FG$ y $\angle B = 45^\circ$. Calcula: α , β , γ , θ

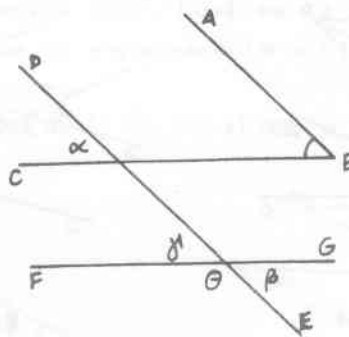


Fig. 50

9. Si $AB \parallel CD$ figura 51, AE : bisectriz del $\angle BAD$ y $\angle ADC = 40^\circ$. Halla α .